第 39 卷 第 1 期 天 文 学 进 展 Vol. 39, No. 1
2021 年 3 月 PROGRESS IN ASTRONOMY Mar., 2021

doi: 10.3969/j.issn.1000-8349.2021.01.06

LIGO 的 O1/O2 引力波事件对 Einstein-aether 理论限制能力探讨

刘刚强，曹周键

(北京师范大学 天文学系，100875)

摘要： 广义相对论是继牛顿万有引力理论后，在强引力场、强动态时空区域更精准的引力理论，大量的天文观测验证了广义相对论的正确性。但广义相对论与量子理论在逻辑体系上不相容，广义相对论还存在时空奇点的理论问题，宇宙学中还存在暗物质和暗能量的引力本质问题等。在使用 Yunes 等人提出的 Einstein-aether 理论修改引力波模板的基础上，用 Fisher Matrix 的参数估计法，探讨了几个典型双星系统对修改引力模板的参数估计所能达到的参数估计精度，以及 LIGO 和 VIRGO 已经发现的 11 个双星并合事件应对修改引力的限制能力；最后，使用匹配因子的方法，探讨修改引力的参数对引力波模板的影响。如果 Einstein-aether 理论只是微小修正广义相对论引力波波形，11 个双星引力波事件可以对 Einstein-aether 理论的3个参数给出限制；如果 Einstein-aether 理论波形与广义相对论引力波波形存在明显偏离，对 Einstein-aether 理论的检验需要更仔细的引力波波形研究和数据分析。

关 键 词： 引力波；广义相对论；Einstein-aether 理论

中图分类号： P142.8$^+$4 **文献标识码：** A

1 引 言

广义相对论是继牛顿万有引力理论后，在强引力场、强动态时空区域更精准的引力理论。广义相对论预言的很多物理现象，包括星光偏折、引力红移、夏皮罗时间延迟、参考系被拖拽的效应和黑洞等都一一得到验证。在广义相对论发表 100 年后，2015 年 9 月 15 日引力波被美国的激光干涉仪引力波天文台 (the laser interferometer gravitational-wave observatory, LIGO) 成功直接探测到。引力波的成功探测完成了广义相对论最后一个理论预言的实验检验[1, 2]，也为人们观测天体和宇宙提供了一种全新手段[3, 4]。

然而，广义相对论仍然存在各种各样的问题。暗物质和暗能量始终是广义相对论这片广

收稿日期：2020-06-30； 修回日期：2020-08-18

资助项目：国家自然科学基金 (11690023)；中央高校基本科研业务费专项资金资助

通讯作者：曹周键，zjcao@amt.ac.cn

袭天空上的两朵乌云。对于推动宇宙加速膨胀起到重要作用的暗能量[5]，我们只能考虑有效场论，唯象层面上在标准广义相对论下加入一些修正 (通常在标准广义相对论下额外考虑一个标量场)，最典型的是 k-essence 理论[6]。对于暗物质同样如此，1933 年，Firtz Zwicy 发现后发座星系团中各个星系团的速度弥散太高，最开始认为只是一些不发光的物质。20 世纪 80 年代左右，大量的观测表明，这种不发光的物质并非我们之前所认识到的基本粒子，这对基础物理提出了一个很大的挑战，这种物质虽然具有很强的宏观引力效应，但是却在局域上与物质相互作用很弱[7]。另外，广义相对论与量子理论在逻辑体系上不相容[8]；而且广义相对论自身预言时空奇点的存在，这些都暗示着广义相对论的理论缺陷。

对广义相对论所有理论预言的成功检验既表明了广义相对论的成功，也给人们带来机会寻找广义相对论失效的物理条件。牛顿万有引力理论适用范围对应的弱场和低速，都是相对于广义相对论黑洞致密程度对应的强场和相对论预言的极限光速而言。可以想象，广义相对论失效的物理条件是相对于一种新理论给出来的特征物理量而言，所以寻找广义相对论失效物理条件的最好方法就是对比不同于广义相对论的引力理论，用实验数据来进行理论选择[9]。引力波实验正好对应强引力场、强动态时空区域的物理条件。引力波实验正在以前所未有的标准检验着广义相对论，同时众多的其他引力理论被引力波实验否定[5, 10–14]。毫无疑问，科学研究进展使人们对引力基本物理有了更深刻的理解。

本文以 Einstein-aether 理论为例，探讨引力波对超越广义相对论引力理论的实验检验。Einstein-aether 理论的引力作用量可写为：

$$S=-\frac{1}{16\pi G_{\mathrm{EA}}}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\left(R+M^{\delta\sigma}_{\mu\nu}\nabla_\delta U^\mu\nabla_\sigma U^\nu\right)\quad, \tag{1}$$

$$M^{\delta\sigma}_{\mu\nu}\equiv c_1 g^{\delta\sigma}g_{\mu\nu}+c_2\delta^\delta_\mu\delta^\sigma_\nu+c_3\delta^\delta_\nu\delta^\sigma_\mu+c_4U^\delta U^\sigma g_{\mu\nu}\quad, \tag{2}$$

其中，U^μ 是以太对应的四速，$g_{\mu\nu}$ 是时空度规，R 是里奇标量，δ^δ_μ 是 Kronecker delta 记号[15]。G_{EA} 是 Einstein-aether 理论的有效引力常数，有别于牛顿的万有引力常数，c_1, c_2, c_3, c_4 是 Einstein-aether 理论的 4 个参数，如果这 4 个参数都等于 0，则 Einstein-aether 理论回到广义相对论。Einstein-aether 理论的参数组合为[16, 17]：

$$\begin{cases} c_+\equiv c_1+c_3\quad, \quad c_-\equiv c_1-c_3\quad, \\ c_{14}\equiv c_1+c_4\quad, \quad c_{123}\equiv c_1+c_2+c_3\quad, \\ \alpha_1^{\mathrm{ppN}}\equiv -\dfrac{8(c_3^2+c_1c_4)}{2c_1-c_+c_-}\quad, \\ \alpha_2^{\mathrm{ppN}}\equiv \dfrac{\alpha_1^{\mathrm{ppN}}}{2}-\dfrac{(c_1+2c_3-c_4)(2c_1+3c_2+c_3+c_4)}{(2-c_{14})c_{123}}\quad, \end{cases} \tag{3}$$

脉冲双星的观测[16]和宇宙学的观测[17]将其限制为：

$$\begin{cases} \left|\alpha_1^{\mathrm{ppN}}\right|\lesssim 10^{-4}\quad, \quad \left|\alpha_2^{\mathrm{ppN}}\right|\lesssim 10^{-7}\quad, \\ c_+\lesssim 10^{-2}\quad, \quad c_-\lesssim 10^{-3}\quad. \end{cases} \tag{4}$$

文章余下部分的安排如下：第 2 章介绍笔者提出的 Einstein-aether 理论中圆轨道双星系统的后爱因斯坦引力波波形形式；第 3 章介绍本文使用的 Fisher Matrix 参数估计方法；第 4 章给出引力波对 Einstein-aether 理论中参数的限制结果和检验 Einstein-aether 理论的结果；第 5 章是小结和讨论。

2 Einstein-aether 理论中圆轨道双星系统的后爱因斯坦引力波波形

根据文献[18]的计算结果，结合圆轨道双星系统的 TaylorF2 引力波波形模型[19, 20]，我们把 Einstein-aether 理论中圆轨道双星系统的后爱因斯坦引力波波形写成如下形式[21]：

$$h(f) = -\sqrt{\frac{288}{1\,225}}\mathcal{A}\alpha\eta^{1/5}f^{-3/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Psi_1(f)} + \mathcal{A}f^{-7/6}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Psi_2(f)} \ , \tag{5}$$

$$\Psi_1(f) = 2\pi f t_c - \phi_c - \pi/4 + \frac{3}{256u_1^5}\left[-\beta_{-1}\eta^{2/5}u_1^{-2} - \beta_0 + \frac{1}{\eta}\sum_{n=0}^{7}u_1^n(p_n + l_n\ln u_1)\right] , \tag{6}$$

$$u_1 = (2\pi M f)^{1/3} \ , \tag{7}$$

$$\Psi_2(f) = 2\pi f t_c - 2\phi_c - \pi/4 + \frac{3}{128u_2^5}\left[-\beta_{-1}\eta^{2/5}u_2^{-2} - \beta_0 + \frac{1}{\eta}\sum_{n=0}^{7}u_2^n(p_n + l_n\ln u_2)\right] , \tag{8}$$

$$u_2 = (\pi M f)^{1/3} \ , \tag{9}$$

$$p_0 = 1 \ , \tag{10}$$

$$l_0 = 0 \ , \tag{11}$$

$$p_1 = 0 \ , \tag{12}$$

$$l_1 = 0 \ , \tag{13}$$

$$p_2 = \frac{20}{9}\left(\frac{743}{336} + \frac{11}{4}\eta\right) \ , \tag{14}$$

$$l_2 = 0 \ , \tag{15}$$

$$p_3 = -16\pi \ , \tag{16}$$

$$l_3 = 0 \ , \tag{17}$$

$$p_4 = 10\left(\frac{3\,058\,673}{1\,016\,064} + \frac{5\,429}{1\,008}\eta + \frac{617}{144}\eta^2\right) \ , \tag{18}$$

$$l_4 = 0 \ , \tag{19}$$

$$p_5 = \pi\left(\frac{38\,645}{756} - \frac{65}{9}\eta\right)[1 - \ln(\pi M f_{\mathrm{lso}})] \ , \tag{20}$$

$$l_5 = 3\pi\left(\frac{38\,645}{756} - \frac{65}{9}\eta\right) \ , \tag{21}$$

(22)

$$p_6=\frac{11\,583\,231\,236\,531}{4\,694\,215\,680}-\frac{640}{3}\pi^2-\frac{6\,848\gamma}{21}-\frac{6\,848}{21}\ln 4+\left(-\frac{15\,737\,765\,635}{3\,048\,192}+\frac{2\,255\pi^2}{12}\right)\eta+\frac{76\,055}{1\,728}\eta^2-\frac{127\,825}{1\,296}\eta^3\ , \tag{23}$$

$$l_6=-\frac{6\,848}{21}\ , \tag{24}$$

$$p_7=\pi\left(\frac{77\,096\,675}{254\,016}+\frac{378\,515}{1\,512}\eta-\frac{74\,045}{756}\eta^2\right)\ , \tag{25}$$

$$l_7=0\ , \tag{26}$$

$$f_{\rm lso}=\frac{1}{6^{3/2}\pi M}\ , \tag{27}$$

其中，γ 是欧拉常数，$M=m_1+m_2$ 是双星总质量，$\eta=\dfrac{m_1m_2}{M^2}$ 是双星系统的对称质量比，$f_{\rm lso}$ 是最后稳定轨道的频率，f 是引力波的频率，$p_0,p_1,p_2,p_3,p_4,p_5,p_6,p_7$ 和 $l_0,l_1,l_2,l_3,l_4,l_5,l_6,l_7$ 是引力波相位 Ψ_1 和 Ψ_2 的展开系数。本文提出的波形模型与文献 [21] 略有不同。文献 [21] 关注后牛顿近似，波形公式 (包括式 (7), (9), (20) 和 (27)) 中的质量都是啁啾质量 (chirp mass)。我们关注波形的准确性，使用了总质量。我们的波形模型在 $\alpha=\beta_{-1}=\beta_0=0$ 时，严格回到 LIGO 数据处理使用的 TaylorF2 波形模型。在唯象层次上，我们的上述模型很容易直接推广到 LIGO 数据分析软件库中最先进的 IMRPhenom 波形模型[22, 23]。文献 [24] 中的公式 (2) (即文献 [25] 的公式 (2.5)) 里的 ψ_n 和 $\psi_n^{(l)}$，以及文献 [2] 中的 ψ_{-2} 和 ψ_0 与本文采用的参数对应关系如下：

$$\begin{cases}\psi_{-2}=0\,, & \delta\psi_{-2}=-\dfrac{3}{128}\beta_{-1}\eta^{2/5}(\pi M)^{-7/3}\ ,\\ \psi_0=\eta^{-1}\,, & \delta\psi_0=-\dfrac{3}{128}\beta_0\ ,\\ \psi_n=\dfrac{3}{128\eta}(\pi M)^{-(n-5)/3}\left[p_n+\dfrac{1}{3}l_n\ln(\pi M)\right], & \delta\psi_n=0\ ,\\ \psi_n^{(l)}=\dfrac{1}{128\eta}(\pi M)^{-(n-5)/3}l_n\,, & \delta\psi_n^{(l)}=0\ .\end{cases} \tag{28}$$

考虑到 GW170817 的多信使天文学对引力波速度的精确测定 (精度约为 10^{-15})[5, 10–12, 26]，我们直接把引力波速度设定为光速。于是将上述波形表达式与文献 [18] 的计算结果相结合，我们得到：

$$\alpha=\gamma_bF_b\sin\psi+\gamma_LF_L\sin\psi+\gamma_{X1}F_X\cos\psi+\gamma_{X2}F_X\sin\psi+\gamma_{Y1}F_Y+\gamma_{Y2}F_Y\sin\psi\ , \tag{29}$$

$$\beta_{-1}=\frac{256}{224}\frac{\epsilon_x}{\kappa_3}\ , \tag{30}$$

$$\beta_0=0\ , \tag{31}$$

其中，ψ 是引力波偏振角，F_b,F_L,F_X,F_Y 是引力波探测器对相应引力波偏振模式的响应函数，$\gamma_b,\gamma_L,\gamma_{X1},\gamma_{X2},\gamma_{Y1},\gamma_{Y2}$ 是 Einstein-aether 理论中相应引力波偏振模式的强度系数。相

应函数和偏振模式强度系数可以表达为 Einstein-aether 理论参数 c_1, c_2, c_3, c_4 的函数，相关表达式的信息参考文献 [18]。ϵ_x 和 κ_3 是 Einstein-aether 理论给出的参数，也是 c_1, c_2, c_3, c_4 的函数，分别定义在文献 [18] 中的公式 (4.6) 和 (6.7)。广义相对论对应 $\epsilon_x = 0$ 和 $\kappa_3 = 1$。本文接下来介绍如何利用引力波探测来限制 α, β_{-1} 和 β_0。

高级 LIGO 探测器自 2015 年 9 月开机以来，已经历了三次观测运行，其探测灵敏度还在不断提高。高级 LIGO 探测器的噪声功率谱可以近似成下面的形式[25]：

$$S_n(f) = \begin{cases} S_0 \left[10^{16-4(f-7.9)^2} + 2.4 \times 10^{-62} x^{-50} + 0.08 x^{-4.69} \right. \\ \left. \qquad +123.35 \left(\dfrac{1 - 0.23x^2 + 0.076\,4x^4}{1 + 0.17x^2} \right) \right] , & f > 10\ \mathrm{Hz} \\ \infty\ , & f < 10\ \mathrm{Hz} \end{cases} . \tag{32}$$

$$x = f/215\,, \quad S_0 = 10^{-49}\ . \tag{33}$$

其中，f 为引力波频率，x 为约化频率，S_0 为总的噪声水平。

3 Fisher Matrix 的参数估计方法

引力波探测器所测得的数据 d 包含信号 s 和噪声 n，即 $d(t) = s(t) + n(t)$。在理想情况下，探测器的噪声是高斯稳态噪声，即 $d(t) - s(t)$ 是一个随机过程，而且各种联合概率分布都是与时间无关的高斯分布。

基于引力波探测器的灵敏度，我们定义两组时间序列 $h_1(t)$ 和 $h_2(t)$ 的内积如下：

$$\langle h_1(t), h_2(t) \rangle \equiv 4\Re \int_{f_{\min}}^{f_{\max}} \frac{\tilde{h}_1 \tilde{h}_2^*}{S_n} \mathrm{d}f \quad , \tag{34}$$

这里 h_1 和 h_2 头上的“~”代表傅立叶变换，“$*$”代表取复共轭，“$\Re$”代表取实部，$(f_{\min}, f_{\max})$ 对应探测器的敏感频率范围。对于高斯稳态噪声 $n(t)$，其内积应该满足高斯分布：

$$p(\langle n(t), n(t) \rangle) \propto \mathrm{e}^{-\langle n(t), n(t) \rangle /2} \quad . \tag{35}$$

于是我们就有条件概率分布：

$$p(d|h) \propto \mathrm{e}^{-\langle d-h, d-h \rangle /2} \quad . \tag{36}$$

对于引力波探测，我们关心的是基于探测数据 $d(t)$，获得信号 $h(t)$ 的概率是多大，也就是条件概率 $p(h|d)$。根据贝叶斯定理，我们可得：

$$p(h|d) = \frac{p(d|h)p(h)}{\int p(d|h)p(h)} \quad , \tag{37}$$

上式分母实为分子对应的概率归一化因子。在贝叶斯统计学里，$p(h|d)$ 被称为后验概率，$p(h)$ 被称为先验概率，$p(d|h)$ 被称为似然函数。

对于某一种类引力波源，如双星系统，引力波波形除了是时间的函数外，还依赖于波源的参数，如双黑洞的质量、自旋和轨道离心率等。我们把这些参数记作 $\vec{\lambda}$，则可得 $h(\vec{\lambda},t)$。概率分布 $p(h|d)$ 和 $p(h)$ 是相对于 $\vec{\lambda}$ 的函数，即是参数空间上的函数。$\int p(d|h)p(h)$ 是对整个参数空间积分。

后验概率 $p(h|d)$ 作为参数空间上的函数，其最大值所对应的点被称为最可几参数 $\vec{\lambda}_0$。在引力波的匹配滤波数据处理中，$\vec{\lambda}_0$ 对应最好匹配的那组参数 [1]。我们再进一步假设信号很强，即信噪比很高，噪声 n 基本可忽略不计，则有 $d\approx h(\vec{\lambda}_0)$, $\langle n,n\rangle\approx\langle n,h\rangle\approx\langle n,\partial_{\lambda^i}h\rangle\approx\langle n,\partial_{\lambda^i}\partial_{\lambda^j}h\rangle\approx 0$。如果我们简化认为先验均匀分布 $p(h)\propto 1$，则根据式 (36) 和 (37) 可得：

$$p(h(\vec{\lambda})|d)=Ce^{-\langle d-h,d-h\rangle/2}\quad , \tag{38}$$

其中，C 是概率分布的归一化因子。我们考虑 $\ln p(h(\vec{\lambda})|d)$ 在 $\vec{\lambda}_0$ 点处的泰勒展开近似：

$$\ln p(h(\vec{\lambda})|d)=\ln C-\langle d-h,d-h\rangle/2\approx\ln C+\frac{1}{2}(\lambda^i-\lambda_0^i)\langle\partial_{\lambda^i}h,\partial_{\lambda^j}h\rangle(\lambda^j-\lambda_0^j)\quad . \tag{39}$$

上式右边的矩阵 $\langle\partial_{\lambda^i}h,\partial_{\lambda^j}h\rangle$ 刚好对应统计学里的 Fisher Matrix。也就是说在高信噪比条件下，后验概率分布在最可几参数点可近似为协方差矩阵 Σ_{ij}，等于 Fisher Matrix 逆 $\langle\partial_{\lambda^i}h,\partial_{\lambda^j}h\rangle=\Sigma_{ij}^{-1}$ 的高斯分布。

本文接下来使用 Fisher Matrix 的方法来估计引力波测量的参数误差

$$\Delta\lambda^i=\sqrt{\Sigma_{ii}}\quad . \tag{40}$$

本文使用的 Einstein-aether 理论中，圆轨道双星系统的后爱因斯坦引力波波形模型包含参数 $(\mathcal{A},\mathcal{M},\eta,t_c,\phi_c,\alpha,\beta_{-1},\beta_0)$，它们分别是引力波幅度 (与引力波源的光度距离和方位角等有关)、啁啾质量、对称质量比、并合时间与相位，以及 Einstein-aether 理论对应的后爱因斯坦参数。我们在计算中发现 $\mathcal{A}$ 与其他参数的关联度很弱，该参数是否参与 Fisher Matrix，所得其他参数的误差基本相同。使用高级 LIGO 探测器的灵敏度，对典型双星系统参数误差结果如表 1 所示。我们的结果与文献 [21] 的一致。由于我们的波形模型与其的细微差别导致了定量上的细微差别，从差别可以看出，我们采用更精确的波形模型 (等效到 3.5 阶后牛顿) 求出的参数误差比采用文献 [21] 的波形模型 (等效到 2 阶后牛顿) 算得的略小。

表 1　使用 Fisher Matrix 方法针对高级 LIGO 灵敏度对典型双星系统进行参数估计的结果

m_1	m_2	Δt_c /ms	$\Delta\phi_c$	$\Delta\mathcal{M}/\mathcal{M}$	$\Delta\eta/\eta$	$\Delta\alpha$	$\Delta\beta_{-1}$	$\Delta\beta_0$
1.4	1.4	0.331	0.925	3.84×10^{-2}	1.64×10^{-2}	0.547	2.79×10^{-5}	0.262
2.0	1.0	0.335	0.976	3.86×10^{-2}	1.40×10^{-2}	0.560	3.47×10^{-5}	0.296
1.8	1.2	0.332	0.936	3.98×10^{-2}	1.52×10^{-2}	0.552	3.29×10^{-5}	0.283
1.4	1.5	0.331	0.921	3.94×10^{-2}	1.61×10^{-2}	0.547	2.99×10^{-5}	0.269

注：假设信噪比等于 10，质量单位是 $M_\odot$。

关于 t_c 和 ϕ_c 这两个参数，我们还尝试了使用 F 统计方法来处理[19]。对于参数误差，使用 F 统计与否， Einstein-aether 理论对应的后爱因斯坦参数限制结果基本没有差别。在下文计算中，我们得到的结果都是没有使用 F 统计的计算结果。

4 对 Einstein-aether 理论进行限制

高级 LIGO 主导的 LIGO 科学合作组织第一次观测运行从 2015 年 9 月 12 日到 2016 年 1 月 19 日，共发现 GW150914, GW151012 和 GW151226 三个双黑洞并合事件。高级 LIGO 主导的 LIGO 科学合作组织第二次观测运行从 2016 年 11 月 30 日开始到 2017 年 8 月 25 日结束。其中高级 VIRGO 从 2017 年 8 月 1 日开始加入第二次观测运行。LIGO 科学合作组织第二次观测运行共发现 GW170104, GW170608, GW170729, GW170809, GW170814, GW170817, GW170818 和 GW170823 八个双星并合事件。

我们把 LIGO 科学合作组织第一次和第二次观测运行发现的 11 个双星并合事件对 Einstein-aether 理论进行参数估计的结果列在了表 2 中。因为只有 GstLAL 数据处理流水线发现了所有的 11 个事件，所以表 2 里所列信噪比 SNR 和双星系统的质量 m_1 和 m_2 都是由 GstLAL 数据处理流水线所得[27]。我们将 LIGO-VIRGO 第一次和第二次探测到的 11 个引力波事件的参数代入到式 (5)—(8) 中，得出带有 Einstein-aether 理论的 3 个参数的模拟波形，再使用 Fisher Matrix 方法估计引力波事件对这 3 个参数的限制能力。从该表结果可以看出，双星系统的质量越小，则对 Einstein-aether 理论的参数限制越严格；这是因为质量越小，落到高级 LIGO 和高级 VIRGO 探测器频段中的引力波信号越多，对 Einstein-aether 理论的验证就越有效。当双星系统的质量增大，直到并合频率落到探测器频段中，虽然并合信号会较强，但我们所使用的引力波波形模型无法利用上并合短信号，导致所得限制不强。

表 2 11 个双星并合事件对 Einstein-aether 理论进行参数估计的结果

ID	SNR	m_1 $/M_\odot$	m_2 $/M_\odot$	$\Delta\alpha$	$\Delta\beta_{-1}$	$\Delta\beta_0$
GW150914	24.4	35.6	30.6	0.191	1.95×10^{-2}	0.392
GW151012	10.0	23.2	13.6	0.510	7.77×10^{-3}	0.489
GW151226	13.1	13.7	7.7	0.407	1.26×10^{-3}	0.351
GW170104	13.0	30.8	20.0	0.376	1.59×10^{-2}	0.467
GW170608	14.9	11.0	7.6	0.358	7.48×10^{-4}	0.293
GW170729	10.8	50.2	34.0	0.414	9.96×10^{-2}	1.64
GW170809	12.4	35.0	23.8	0.385	2.65×10^{-2}	0.609
GW170814	15.9	30.6	25.2	0.301	1.73×10^{-2}	0.430
GW170817	33.0	1.46	1.27	0.166	8.07×10^{-6}	0.0779
GW170818	11.3	35.4	26.7	0.418	3.44×10^{-2}	0.739
GW170823	11.5	39.5	29.0	0.404	4.67×10^{-2}	0.901

注：后面 3 列参数的估计结果由我们的 Fisher Matrix 分析所得。

综合 LIGO 科学合作组织第一次和第二次观测运行发现的 11 个双星并合事件对 Einstein-aether 理论进行参数限制的结果，可以得到：

$$\alpha < 0.166\,, \quad \beta_{-1} < 8.07\times10^{-6}\,, \quad \beta_0 < 7.79\times10^{-2} \quad .$$

但我们要注意，以上限制结果基于假定广义相对论的引力波模板可以完全匹配探测器所测得的信号。引力波对 α 参数限制不好，对 β_{-1} 和 β_0 限制不错；这是因为 α 与引力波的幅度相关，β_{-1} 和 β_0 与引力波的相位相关。而匹配滤波本来就只是敏感依赖于相位。

为了估计广义相对论波形模板匹配 Einstein-aether 理论引力波信号的程度，我们引入引力波匹配因子 FF[28, 29]。给定两个引力波波形 $h_1(t)$ 和 $h_2(t)$，它们间的匹配因子为：

$$FF \equiv \frac{\langle h_1(t), h_2(t)\rangle}{\sqrt{\langle h_1(t), h_1(t)\rangle\cdot\langle h_2(t), h_2(t)\rangle}} \quad . \tag{41}$$

当用一个波形近似另一个波形信号时，信噪比会被降低 FF 倍。如果降得太多，这样的波形近似就会失效。

我们以 GW170817 的双星参数为例，研究广义相对论与 Einstein-aether 理论的引力波波形匹配情况。鉴于匹配滤波与引力波幅度不是敏感依赖，我们只讨论匹配因子与 β_{-1} 和 β_0 的关系，结果见图 1。从图 1 我们可以看出，只要 β_{-1} 和 β_0 偏离 0 分别在 10^{-6} 和 10^{-3} 的量级，Einstein-aether 理论的引力波波形与广义相对论的波形完全不匹配。所以只要 GW170817 的引力波信号是广义相对论描述的波形，Einstein-aether 理论的 β_{-1} 和 β_0 参数就可以得到很好的限制。

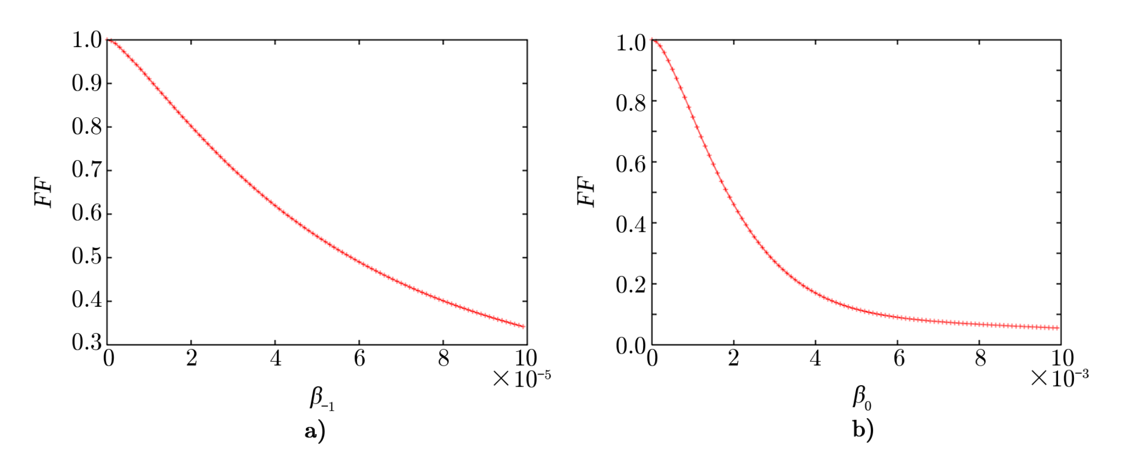
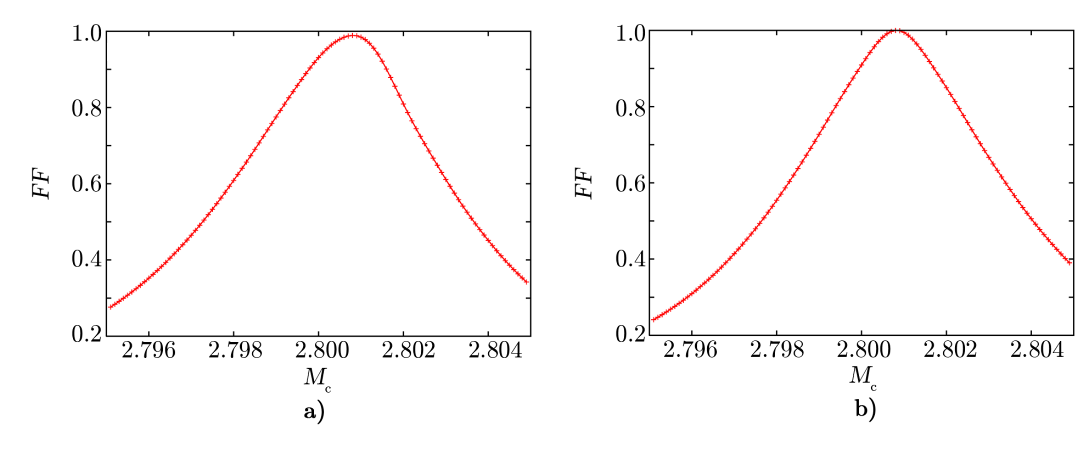


图 1　类似 GW170817 的广义相对论引力波波形和 Einstein-aether 理论的引力波波形匹配情况

这里还存在一个问题：是否 GW170817 实为 Einstein-aether 理论描述，只是因为 β_{-1} 和 β_0 与啁啾质量的参数简并使得广义相对论模板没有遗漏这个信号？接下来我们研究这个问题。为此，我们设定 $\beta_{-1} = 6\times10^{-5}, \beta_0 = 0$ 和 $\beta_{-1} = 0, \beta_0 = 0.002$，然后改变啁啾质量，研究波形匹配因子，结果见图 2。从图 2 可以看出，的确可以通过改变啁啾质量来使得广义

相对论的引力波波形与 Einstein-aether 理论的引力波波形相匹配，即 β_{-1} 和 β_0 与啁啾质量存在参数简并。所以在不确定所探测到的引力波信号可由广义相对论描述的情况下，引力波的探测不能被认已经对 Einstein-aether 理论给出了很好的限制，现在我们只能说广义相对论能很好地解释所有探测到的引力波信号[2]。



注：这里我们使用了 $\eta = 0.25$ 和 $\mathcal{M} = 2.8M_\odot$ 作为参考。a) 比较了 $\beta_{-1} = 6\times10^{-5}, \beta_0 = 0$ 时 Einstein-aether 理论与不同啁啾质量的广义相对论引力波波形匹配情况；b) 比较了 $\beta_{-1} = 0, \beta_0 = 0.002$ 时 Einstein-aether 理论与不同啁啾质量的广义相对论引力波波形匹配情况。

图 2 Einstein-aether 理论中 β_{-1} 和 β_0 与啁啾质量的参数简并情况

5 结论和讨论

自 2015 年 LIGO 首次直接探测到引力波以来，高级 LIGO 和高级 VIRGO 一起进行了三次观测，共探测到几十例引力波事件，包括双黑洞、双中子星和黑洞-中子双星系统的并合，以引力波为观测手段的引力波天文学被很好地建立起来。

引力波天文学可以用来研究基本物理学中的引力相互作用[22, 24, 30]。GW170817 就被成功应用到引力理论的检验中，若干不同于广义相对论的引力理论得到了很强的限制。

在文献 [18] 的计算结果基础上，结合 TaylorF2 引力波波形的模式，我们提出了 Einstein-aether 理论中双星系统的引力波波形模型。基于所提出的波形模型，我们利用 Fisher Matrix 方法，结合 LIGO 科学合作组织公开的第一、第二次观测运行结果数据中的 11 个双星系统，对 Einstein-aether 理论进行了限制、研究。Fisher Matrix 方法只对参数微小偏离，或者说只在 Einstein-aether 理论微小修正广义相对论引力波波形的情形下有效。这种情形下，使用 Einstein-aether 理论的引力波波形模板对引力波实际数据的处理会得出与广义相对论相似的结果，所以我们只需要使用 Fisher Matrix 方法对后验概率分布做微扰研究即可。这样的条件使得我们可以把 LIGO 已经测出的 11 个双星对应的参数输入到 Fisher Matrix 方法进行分析。反之，一旦参数微小偏离不成立，Fisher Matrix 方法将失效。

我们采用匹配滤波中匹配因子的方法，探讨广义相对论引力波波形与 Einstein-aether 理论的引力波波形存在显著偏离的可能性及其对引力波数据处理的影响。

结果表明，如果 Einstein-aether 理论只是广义相对论的微小偏离 (在引力波波形意义上)，则我们可以把 Einstein-aether 理论中的参数限制为 $\alpha < 0.166$， $\beta_{-1} < 8.07 \times 10^{-6}$， $\beta_0 < 7.79 \times 10^{-2}$。但只是基于引力波探测，我们还不能完全排除 Einstein-aether 理论显著偏离广义相对论的可能性，这时 Einstein-aether 理论的参数和双星系统的啁啾质量存在简并。我们计划在后续工作中，使用贝叶斯模型选择的方法来研究这种简并的可能性有多大。

参考文献：

[1] 曹周键, 都志辉. 中国科学: 物理学力学天文学, 2017, 47(1): 405
[2] Abbott B P, et al. Phys Rev D, 2019, 100: 4036
[3] Cao Z. Science China Physics, Mechanics & Astronomy, 2016, 59(11): 431
[4] Cai R G, Cao Z, Guo Z K, et al. National Science Review, 2017, 4(5): 687
[5] Creminelli P, Vernizzi F. Phys Rev Lett, 2017, 119: 251302
[6] Armendariz-picon C, Mukhanov V, Steinhardt P J. Phys Rev D, 2001, 63: 103510
[7] Clowe D, Bradač M, Gonzalez A H, et al. The Astrophysical Journal, 2006, 648(2): L109
[8] Yang J, Ma Y. Chinese Science Bulletin, 2015, 60(34): 3287
[9] Yagi K, Blas D, Barausse E, et al. Phys Rev D, 2014, 89: 084067
[10] Baker T, Bellini E, Ferreira P G, et al. Phys Rev Lett, 2017, 119: 251301
[11] Sakstein J, Jain B. Phys Rev Lett, 2017, 119: 251303
[12] Ezquiaga J M, Zumalacárregui M. Phys Rev Lett, 2017, 119: 251304
[13] 曹周键, 何孝凯. 中国科学: 物理学力学天文学, 2018, 48(7): 079806
[14] Abbott B P, et al. Phys Rev Lett, 2019, 123: 011102
[15] 梁灿彬, 周彬. 微分几何入门与广义相对论. 科学出版社, 北京, 2009: 5
[16] Will C M. Living Reviews in Relativity, 2006, 9(1): 3
[17] Yagi K, Blas D, Yunes N, et al. Phys Rev Lett, 2014, 112: 161101
[18] Zhang C, Zhao X, Wang A, et al. Phys Rev D, 2020, 101: 044002
[19] Cao Z, Li L F, Wang Y. Phys Rev D, 2014, 90: 062003
[20] 蔡荣根, 曹周键, 韩文标. 科学通报, 2016, 61(14): 1525
[21] Hansen D, Yunes N, Yagi K. Phys Rev D, 2015, 91: 082003
[22] Meidam J, Tsang K W, Goldstein J, et al. Phys Rev D, 2018, 97: 044033
[23] Khan S, Ohme F, Chatziioannou K, et al. Phys Rev D, 2020, 101: 024056
[24] LI T G F, Del pozzo W, Vitale S, et al. Phys Rev D, 2012, 85: 082003
[25] Mishra C K, Arun K G, Iyer B R, et al. Phys Rev D, 2010, 82: 064010
[26] Oost J, Mukohyama S, Wang A. Phys Rev D, 2018, 97: 124023
[27] Abbott B P, et al. Phys Rev X, 2019, 9: 031040
[28] Cao Z, Han W B. Phys Rev D, 2017, 96: 044028
[29] Liu X, Cao Z, Shao L. Phys Rev D, 2020, 101: 044049
[30] Sampson L, Cornish N, Yunes N. Phys Rev D, 2013, 87: 102001

On the Test Ability of Einstein-aether Theory with Gravitational Wave Events in LIGO O1/O2

LIU Gang-qiang, CAO Zhou-jian

(The Department of Astronomy, Beijing Normal University, Beijing 100875, China)

Abstract: General relativity is a more accurate gravitational theory for strong gravitational field and dynamic space-time region after Newton's theory of gravity. A large number of astronomical observations have verified the theory of general relativity. However, general relativity and quantum theory are not compatible logically. There are also some theoretical problems in general relativity, such as the singularity of space-time, the problem of dark matter and dark energy in cosmology. Based on modified waveform of the Einstein-ather theory proposed by Yunes and his coworkers, Fisher matrix method is used to discuss the parameter estimation accuracy of several typical binary systems, and the ability of 11 binary merging events discovered by LIGO and Virgo are used to constrain the modified gravity. Finally, using the matching factor to discuss the influence of the modified gravitational parameters on the gravitational wave template. If Einstein-ather theory just slightly modifies the gravitational wave waveform of general relativity, 11 binary gravitational wave events can limit the three parameters of Einstein-ather theory. If the waveforms of Einstein-ather theory deviate significantly from the waveforms of general relativity, the test of Einstein-ather theory needs more careful study of gravitational wave waveforms and data analysis.

Key words: gravitational wave; general relativity; Einstein-ether theory